Test di Matematica (A)

Scienze Agrarie 3/11/2021

1) Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)+5x}{6x-\cos(x)}\,.$$

2) Data la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{5x}{x^2-5x+6}\,,$$

determinare le equazioni degli eventuali asintoti verticali.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) \;=\; \log\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

e calcolarne la funzione derivata prima.

4) Calcolare, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{x}{x-1}\,dx\,.$$

Soluzione

1) Il limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty 0}$ poiché la funzione $\arctan(x)$ ha limite finito $\pi/2$ mentre la funzione $\cos(x)$ non ha limite ma risulta limitata. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)+5x}{6x-\cos(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\frac{\arctan(x)}{x}+5)}{x(6-\frac{\cos(x)}{x})} = \frac{0+5}{6-0} = \frac{5}{6}\,.$$

2) La funzione data non risulta definita per $x=2$ e $x=3$.
Dai limiti

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{5x}{x^2-5x+6} = \mp\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 3^{\pm}} \frac{5x}{x^2-5x+6} = \pm\infty\,,$$

si deduce che la funzione ha due asintoti verticali di equazione $x=2$ e $x=3$.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $\frac{x+3}{x-1} > 0$. Si ha quindi

$$D =]-\infty,-3[\,\cup\,]1,+\infty[\,.$$

Si ha

$$f'(x) \;=\; \frac{x-1}{x+3}\,\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} \;=\; \frac{-4}{(x+3)(x-1)}$$

4) Calcoliamo le primitive della funzione integranda date da.

$$\int \frac{x}{x-1}\,dx \;=\; \int 1\,dx + \int \frac{1}{x-1} \;=\; x+\log|x-1|+C.$$

Per sapere se la funzione risulta integrabile in senso improprio si calcola

$$\lim_{t\to 1^-} [x+\log|x-1|]_0^t \;=\; \lim_{t\to 1^-} (t+\log|t-1|) \;=\; -\infty\,.$$

Il limite calcolato non risulta finito per cui non esiste l'integrale improprio della funzione sull'intervallo $[0,1]$.